

# رویکردی ریاضی به فرآیند تحلیل سلسله مراتبی

## AHP

تالیف: دکتر جمشید صالحی صدقیانی

(استاد دانشگاه علامه طباطبائی)

### "چکیده"

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی AHP یکی از تکنیک های معتبر و قوی تصمیم گیری چند معیاره می باشد. در این مقاله رویکرد ریاضی به AHP مورد بحث قرار می گیرد. در سال ۱۹۹۷ یک محقق بنام<sup>۱</sup> جانانان بارزیلای مدل AHP را فاقد چارچوب صحیح ریاضی برای تجزیه و تحلیل سلسله مراتبی در تصمیم گیری دانست. در این مقاله نقد بارزیلای نسبت به AHP به آن پرداخته است، تشریح شده که عمدتاً به شرح زیر می باشد. (۱) معمولاً توابع ارزشی غیر خطی می باشند، AHP توابع ارزشی چندگانه را بوسیله نرخ های جانشینی ثابتی بوجود می آورد که منجر به ایجاد توابع ارزشی چندگانه خطی می گردند.

۲) در AHP برای جبران فقدان نرخهای جانشینی از برآوردهای نرخهای جانشینی استفاده می‌شود، که این برآوردها ممکن است سازگار نباشند. اما نرخهای اصلی جانشینی همیشه سازگار هستند در واقع ضرایب مدل بوسیله روش نرمال سازی ماتریس‌ها از نسبت‌های وزنی ناسازگار برآورد شده، بدست می‌آیند.

۳) در AHP استفاده از روش نرمال سازی ماتریس و استانداردسازی بردارهای ضرایب منجر به مدلسازی نادرست می‌گردد و در واقع تجزیه درختی هم ارز ممکن است به دسته بندی غیر هم ارز توابع ارزشی منجر شود.

#### مقدمه

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی AHP<sup>۱</sup> نوعی روش تصمیم‌گیری چند معیاره<sup>۲</sup> است که برای نخستین بار توسط توماس ال ساعتی<sup>۳</sup> در دهه ۱۹۷۰ ابداع گردید. این روش در موقعیت‌هایی که تصمیم‌گیری پیچیده با چند عامل چه کیفی و چه کمی مواجه است استفاده می‌گردد. تصمیم‌گیری با این روش بصورت فردی یا گروهی انجام می‌شود و به علت ساده بودن و کاربرد وسیع آن در رشته‌های مختلف موفقیت‌های بسیاری در مراکز تصمیم‌گیری، سازمانها و مراکز علمی و تحقیقی بدست آورده است. ساختار ریاضی AHP از گروه توابع ارزشی چندگانه<sup>۴</sup> است و عمده کاری که روش AHP بر روی این توابع انجام می‌دهد، تجزیه توابع ارزشی به اجزایی با اندازه‌های قابل کنترل و ساختار مناسب می‌باشد که در عمل همان ایجاد درخت سلسله مراتبی است. علیرغم مطالعات علمی بسیاری که بر روی این روش و کاربردهای آن صورت گرفته است، توجه کمی به توجیه ساختار ریاضی و امر تجزیه موفقیت تصمیم‌گیری با رویکرد اثبات‌گرای ریاضی به عمل آمده است. بررسی این روش از دیدگاه ریاضی، نیاز به ایجاد چارچوب صحیح

1- Analytic Hierachy Process.

2- Multiple Criteria Decision Making

۳- منبع شماره ۷

4- Multi - Attribute value Functions.

برای تجزیه توابع ارزشی خطی و غیر خطی به ساختارهای درختی یا غیر درختی دارد که این مدل را با به خدمت گرفتن ابزارهای ریاضی و استانداردهای بنیادی قوی در تشریح مسائل مهم تجزیه و تحلیل تصمیم‌گیری، توانا سازد.

در سال ۱۹۹۷ محققى به نام ج. بارزیلای<sup>۱</sup> در یک مقاله عنوان نمود که مدل AHP دارای چارچوب صحیح توابع ارزشی نیست و نشان داد که AHP از تجزیه توابع ارزشی هم ارز، طبقه‌بندی‌های غیر هم ارز ایجاد می‌کند. در این مقاله سعی بر تبیین و تشریح مفاهیم مورد تأکید ج. بارزیلای مبنی بر اینکه AHP تجزیه‌کننده خوبی برای توابع ارزشی نمی‌باشد، شده است.

در بخش ۱ آشنایی مختصری با AHP صورت می‌گیرد. در بخش ۲ توابع ارزشی و مفاهیم هم ارزی و نرخ‌های نهایی جانشینی در بخش ۴ تابع ارزشی خطی AHP و کاربردهای آن در بخش ۳ تفاوت میان معیارها گزینه‌ها می‌شود. در بخش ۵ قوانین ترکیب عمومی و در بخش ۶ کاربرد این قانون در یک سلسله برنامه ریزی خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتیجه که قانون ترکیب به اندازه AHP ناکارآمد عمل می‌کند.

## ۱- فرآیند تحلیل سلسله مراتبی AHP چیست؟

AHP در آغاز بر اساس تحلیل مغزی انسان برای مسائل پیچیده و نادقیق پیشنهاد گردید و بر اساس منطق دو گروه مفهوم فازی که توسط آقای توماس<sup>۲</sup> ال ساعتی بیان گردید، توسعه داده شد که این دو مفهوم عبارتند از: (۱) مفهوم فازی در درک، که بعلت پیچیدگی پدیده‌هایی که بلافاصله قابل درک نیستند بوجود می‌آید. (۲) مفهوم فازی در معنی، که بعلت نسبیّت معانی می‌باشد.

بطور کلی مدل AHP جزء مدل‌های چند معیاره تصمیم‌گیری است. این مدل‌ها به دو گروه عمده تقسیم می‌گردند:

۱- مدل‌های چند منظوره (چند هدفه)<sup>۱</sup>

۲- مدل‌های چند شاخصه MADM<sup>۲</sup>

مدل‌های MODM مانند مدل‌های برنامه ریزی آرمانی در طراحی بکار می‌روند. مدل‌های MODM به منظور انتخاب گزینه برتر در جایی که معیارها معلوم و دست نیافتنی و گزینه‌ها نیز مشخص باشند و هدف ارزیابی اولویت بندی راهکارها و انتخاب بهترین راه باشد استفاده می‌گردند. AHP نیز از گروه MODM است.

### خصوصیات AHP:

- ۱- تحلیلی بودن: استفاده از اعداد و ارقام در تحلیلهای استنباطی
- ۲- سلسله مراتبی بودن: تجزیه وضعیت های پیچیده بر اساس اولویت ها، اهداف، معیارها و گزینه‌ها.
- ۳- فرآیندی بودن: اتخاذ تصمیم نیازمند بررسی همه جانبه توسط افراد مختلف طی جلسات گوناگون و اعمال نظرات آنها تا اخذ نتیجه می‌باشد.

### مراحل اجرای تکنیک AHP:

#### ۱- ایجاد درخت سلسله مراتب تصمیم:

درخت سلسله مراتب تصمیم بیانگر استراتژی تصمیم بصورت گرافیکی است. ابتدایی ترین سطح این درخت، هدف تصمیم‌گیری است. سطوح میانی معیارهای مؤثر بر تصمیم‌گیری و سطح آخر گزینه‌های تصمیم‌گیری هستند. مهمترین بخش در این مرحله انتخاب معیارها و عوامل مؤثر بر هدف تصمیم می‌باشد.

1- Multiple object Decision Making (MODM)

2- Multiple attribute Decision Making

## ۲- مقایسات زوجی<sup>۱</sup>:

در این مرحله با توجه به عوامل مؤثر، بر اساس هر یک از معیارها ماتریس های زوجی تشکیل می گردند. در هر یک از ماتریس ها با استفاده از یک مقیاس خاص که از ترجیح یکسان تا بی نهایت مرجح طراحی شده است، مقایسه ها صورت می پذیرند. تجربه نشان داده است که استفاده از مقیاس  $\frac{1}{9}$  تا ۹ تصمیم گیرنده را جهت انجام مقایسه به گونه مطلوب تری توانا می سازد.

## ۳- نرمال سازی<sup>۲</sup> و تعیین اولویت ها

برای بدست آوردن اولویت ها از مفهوم نرمال سازی و میانگین موزون استفاده می شود. یعنی گزینه های مختلف را بر اساس نتایج بدست آمده از نظر هر معیار با یکدیگر مقایسه کرده و سپس آنها را توسط میانگین وزنی نرمال می کنیم، سپس اطلاعات بدست آمده از این طریق را در ماتریسی که سطر و ستونهای آن را گزینه ها و معیارهای تصمیم گیری تشکیل می دهند مرتب کرده و با استفاده از مفهوم میانگین وزنی، وزنهای بدست آمده برای هر کدام از معیارها را در ماتریس های ستونی نرمال شده قبلی ضرب کرده و نتایج حاصله را بصورت سطری با هم جمع و در نهایت این جمع را با بقیه گزینه ها مقایسه نموده و اولویت هر گزینه را مشخص می نمایم.

## ۴- نرخ سازگاری<sup>۳</sup>

نرخ سازگاری مکانیزمی است که بیان می دارد تا چه اندازه می توان به اولویت های حاصل شده از جدول ترکیبی اعتماد کرد.

## ۲- توابع ارزشی:

1- Pairwise Comprison.

2- Normalizing

3- Consistency rate

۲-۱) تعریف:

تابع  $U$  یک تابع ارزشی خوانده می شود اگر

$$U: D \rightarrow R \text{ و } D \subset R^n \text{ و } x \in D$$

$$\text{if } x_1 \geq x_2 \iff U(x_1) \geq U(x_2)$$

$$\text{و } x_1 \sim x_2 \iff U(x_1) = U(x_2)$$

$D$ : فضای ارزیابی یعنی مجموع گزینه هایی که بر طبق ملاحظات موجود عملی هستند.

$\geq$ : یعنی ترجیح دارد و یا تفاوت ندارد با

$\sim$ : یعنی یکسان است با

به این ترتیب توابع ارزشی ساختار ترجیحی تصمیم گیری را لحاظ می کنند.

۲-۲) هم ارزی و منحصر به فرد بودن توابع ارزشی:

شرط هم ارزی دو تابع ارزشی:

$$\forall x \text{ و } y \in D \quad \text{توابع ارزشی } U_1(x) \text{ و } U_2(x) \text{ هم ارز هستند اگر:}$$

$$U_1(x) > U_1(y) \iff U_2(x) > U_2(y)$$

$$\text{و } U_1(x) = U_1(y) \iff U_2(x) = U_2(y)$$

حال فرض کنید  $f: R \rightarrow R$  تابعی مطلقاً صعودی باشد یعنی:

$$\text{if } x_1 > x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)$$

حال اگر  $U(x)$  و  $f(x)$  به ترتیب یک تابع ارزشی و یک تابع مطلقاً صعودی باشند،

$$U(x_1) \geq U(x_2) \iff f(U(x_1)) \geq f(U(x_2)) \text{ است و } f(U(D))$$

در اینجا  $f(U(x))$  هم ارز تابع  $U(x)$  است.

این مطلب نتیجه می دهد که توابع ارزشی منحصر به توابع مطلقاً صعودی هستند و طبق

فرضیات مشخص وقتی ساخت تابع  $\geq$  باشد روشن می شود که تابع ارزشی مورد نظر

منحصرأ تابعی مطلقاً صعودی است.

۲-۳) تقریب درجه اول:

معمولاً توابع ارزشی غیر خطی هستند ولی تقریبهای درجه اول  $U(x)$  که به وسیله بسط ناقص Taylor معرفی شده‌اند مشابه رابطه زیر می‌باشند.

$$C + \sum_{j=1}^n w_j x_j$$

باید توجه داشت که تابع (۱) هم ارز تابع ارزشی  $\sum_{j=1}^n w_j x_j$  با  $K > 0$  است همانطور که

بعداً خواهیم دید تمام توابع ارزشی در AHP به شکل زیر نشان داده می‌شوند.

$$U(x) = \sum_{j=1}^n w_j x_j \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad (2)$$

که  $K = 1$  فرض شده است و  $U(x)$  تابعی خطی با ضریب وزنی نرمال شده است.

۲-۴) نرخ‌های نهایی جانشینی:

فرض کنید  $C = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  تابعی در سطح بی تفاوتی در نقطه  $P$  باشد، نرخ نهایی جانشینی ( $x_i$  در ارتباط با  $x_j$ ) در نقطه  $P$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_{ij} \mid p = - \frac{dx_i}{dx_j} \mid p = \frac{\partial U}{\partial x_j} \mid p \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_i} \mid p \quad (3)$$

در برهان ۲ ما به این اصول نیازمندیم تا تابع ارزشی را به وسیله نرخهای جانشینی ثابت آن بشناسیم ولی نتایجی که از برهان ۱ بدست می‌آید برای تعریف بعدی مورد نیاز است. نرخهای نهایی جانشینی  $U(x)$  به این شرط در سطح  $p$  سازگار هستند که در شرط زیر صدق کنند:

$$\lambda_{iK} \mid p = \lambda_{ij} \mid p \times \lambda_{jK} \mid p \quad (4)$$

## برهان I:

اگر نرخهای نهایی جانشینی تابع ارزشی  $U(x)$  در نقطه  $P$  موجود باشند، آنها سازگار هستند.

اثبات:

با در نظر گرفتن  $U(x)$  و مشتقات جزئی آن معادله ۳ به معادله ۴ دلالت خواهد کرد و بنا به تعریف ۳ با فرض وجود نرخهای نهایی جانشینی و با وجود  $U(x)$  و مشتقات جزئی آن درخواهیم یافت که معادله ۴ به دست خواهد آمد.

در AHP برای جبران فقدان نرخهای جانشینی اصلی نرخهای جانشینی را برآورد می نمایند. از برهان I برمی آید که برآوردها ممکن است سازگار نباشند ولی خود نرخهای جانشینی همواره سازگار هستند. مشابه این حالت در رگرسیونهای خطی وجود دارد که اگر چه ممکن است داده‌ها، غیرخطی باشند ولی مدل اصلی خطی خواهد بود. در بخش بعد نشان خواهیم داد که وجود نرخهای نهایی جانشینی ثابت دلالت می کند که  $U(x)$  ضرورتاً خطی است.

## ۲-۵) نرخهای جانشینی ثابت و تابع ارزشی خطی:

برهان زیر تابع ارزشی خطی را توسط نرخهای نهایی جانشینی آن معرفی می کند.

برهان II  $U(x) \in c'(D) \iff 1 \leq i, j \leq n$

$n$

$$U(x) = f\left(\sum_{j=1}^n w_j x_j\right) \quad \forall p \in D : \lambda_{ij} | p = \lambda_{ij}$$

$j=1$

اگر در جانشینی  $x_j$  به جای  $x_i$  نرخهای نهایی جانشینی وجود داشته باشند و ثابت باشند تابع ارزشی به فرم بالا است اگر و تنها اگر برای هر جفت  $1 \leq i, j \leq n$  نرخهای نهایی جانشینی در جایگزینی  $x_j$  به جای  $x_i$  وجود داشته و ثابت باشند.

$$\lambda_{ij} | p = \lambda_{ij} \quad p \in D$$



اثبات:

دیفرانسیل‌گیری از نرخهای نهایی جانشینی  $x_i$  به جای  $x_j$  در تابع  $U(x) = f(\sum_{j=1}^n w_j x_j)$  مقدار ثابت  $\frac{w_i}{w_j}$  را به دست می‌دهد.

فرض می‌کنیم نرخهایی نهایی جانشینی  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  وجود دارند و همگی ثابت هستند تابع  $U(x)$  باید در تمام معادلات زیر صدق کند.

$$\lambda_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) / \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \quad 1 < i, j < n$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} - \lambda_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

با بازنویسی این معادلات به صورت زیر داریم:

این معادلات مشتقات جزئی خطی  $U(x)$  با ضریب ثابت هستند. با توجه به معادله ۵ برای مجموعه‌ای از معادلات خطی برای  $n$  نامعلوم  $\frac{\partial U}{\partial x_i}$  به راحتی مشخص می‌شود که تعداد معادلات مستقل این سری  $n - 1$  معادله است.  $n - 1$  معادله برای  $i = 1$  و  $2$  و  $\dots$  و  $n - 1$  و  $j = i + 1$  مستقل هستند. سیستم ۵ یک راه حل است همانطور که در بخش ۴-۲ دیدیم وجود نرخهای نهایی جانشینی دلالت می‌کنند که  $\lambda_{ij} \cdot \lambda_{jk} = \lambda_{ik}$   $U(x)$  تعیین می‌شود. پس ما باید  $n - 1$  معادله خطی را حل کنیم.

$$(6) \sum a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} = 0 \quad i = 1 \text{ و } \dots \text{ و } n - 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_{32} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_{43} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda_{n,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

جایی که  $A = a_{ij}$  و ماتریس است.

در ماتریس A تمام درایه‌های زیر قطر اصلی صفر است و قطر اصلی آن هم ۱ می‌باشد پس ماتریس A ماتریس یکه نیست. با تغییر دادن  $U, y = (A^{-1})^T x$  را می‌توان تابعی از متغیرهای زنجیره‌ای ... و  $(y_1 \text{ و } \dots \text{ و } y_n)$  خواند.

$$\frac{\delta U}{\delta y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta U}{x_j} \frac{\delta x_j}{\delta y_i} \quad (V)$$

$$(A) \frac{\delta x_j}{\delta y_i} = a_{ij} \text{ در نتیجه } x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \text{ یا } x = A^T y \text{ و } y = (A^{-1})^T x$$

با جاگذاری معادله ۸ در معادله ۷ و با توجه به معادله ۶ خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{\delta y_i} = 0 \quad \forall i = 1 \text{ و } \dots \text{ و } n - 1$$

پس U فقط به  $y_n$  وابسته است یا به عبارت دیگر  $U = f(y_n)$

سرانجام با توجه به ردیف آخر  $(A^{-1})^T$  و همچنین  $w_1 \text{ و } \dots \text{ و } w_n$  خواهیم دید:

$$y = (A^{-1})^T x \quad \rightarrow \quad y_n = \sum_{j=1}^n w_j x_j$$

$$\text{پس } U = f(\sum_{j=1}^n w_j x_j) \text{ و یعنی برهان ثابت شد.}$$

AHP تابع ارزش چندگانه را به وسیله نرخهای جانشینی سازگاری می‌سازد که این نرخهای نهایی جانشینی را با برآوردهایی غیرسازگار به دست آورده است. با توجه به این که هر نسبت معیار به وزن فقط یکبار تعیین می‌شود این نرخهای جانشینی تمام Pها را در

D قرار داده و سپس سازگار می‌کند. از برهان ۱ چنین برمی‌آید که نرخهای توابع ارزشی

$$U = f\left(\sum_{j=1}^n w_j x_j\right)$$

AHP به شکل

$f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x$  بتون Belten توضیح داد که تابع ارزشی AHP مسائل یک سطحی خطی هستند<sup>۱</sup> ولی ما نشان دادیم که آنها همیشه خطی هستند توجه کنید اگرچه  $w_j$ ,  $x_j$  در داده‌های ورودی خطی نیستند ولی  $U(x)$  در متغیرهای خود همیشه خطی است یعنی به شکل  $U(x) = \sum_{j=1}^n w_j x_j$  است.

### برهان III

توابع ارزشی ایجاد شده به وسیله AHP همیشه خطی هستند (یا AHP، توابع ارزشی را همیشه خطی در نظر می‌گیرد).

### ۳- معیار و گزینه‌ها

در توابع ارزشی، معیارها محورهای هم‌رتبه‌ای از فضای دامنه D تابع  $U(x)$  هستند که عبارتند از  $x = (x_1, \dots, x_n)$  (x نماینده i امین ملاک است).

هر گزینه نقطه‌ای (سطحی) در دامنه D نظیر  $p = (p_1, \dots, p_n)$  اولین مرحله در فرآیند انتخاب فضای موجه می‌باشد و با توجه به این که نقاط هم‌رتبه به تعریف محورها بستگی دارند مباحث مطرح در ادبیات AHP در مورد وابستگی یا استقلال گزینه‌های هر معیار معنی نمی‌دهند و این در صورتی است که تبدیلات هم‌رتبه‌ای یکی از عملهای کلیدی در تحلیل سلسله مرتبه‌ای است.

### ۴- توابع ارزشی خطی AHP

## ۴-۱) کاربرد AHP در مسأله مکان یابی یک کارخانه:

در بررسی اقتصادی یک طرح صنعتی جهت انتخاب مکان مناسب برای استقرار یک کارخانه تولیدی مواد شیمیایی، عوامل زیر به عنوان معیارهای اصلی گزینش محل ساختن کارخانه توسط یک کمیته کارشناسی تعیین شده‌اند.

c<sub>۱</sub>- زمین

y<sub>۱</sub>- عوامل طبیعی: c<sub>۲</sub>- مجاورت با رودخانه

c<sub>۳</sub>- وضعیت هوا از نظر دما و رطوبت

c<sub>۴</sub>- تسهیلات آب و هوا و مخازرات

y<sub>۲</sub>- عوامل فنی: c<sub>۵</sub>- شبکه حمل و نقل مناسب

c<sub>۶</sub>- دسترسی به نیروی انسانی ماهر

c<sub>۷</sub>- دسترسی به منابع مواد اولیه

y<sub>۳</sub>- عوامل اقتصادی: c<sub>۸</sub>- دسترسی به بازار مصرف

c<sub>۹</sub>- تأمین مالی از طریق وام

y<sub>۴</sub>- قوانین دولتی: c<sub>۱۰</sub>- مسائل زیست محیطی

با توجه به معیارهای انتخاب مکان، پس از بررسی‌های کارشناسی سه مکان مناسب در شهرکهای صنعتی سه استان در کشور، بعنوان گزینه‌های نهایی معرفی شده‌اند که عبارتند از مکان C و B و A. کمیته کارشناسی قصد دارد که یکی از این سه شهر را بعنوان انتخاب نهایی مکان اجرایی طرح معرفی نماید. لذا از روش AHP برای این امر استفاده می‌کند. جهت اولویت بندی هر کدام از گزینه‌ها از نظر معیارهای مطرح شده (c<sub>۱</sub> و ... و c<sub>۱۰</sub>) مقایسات زوجی صورت گرفته است و ارزش نهایی هر گزینه با توجه به وزن معیار مورد نظر در ردیف آخر جدول شماره ۱ دیده می‌شود.

## ۴-۲) قانون جامع AHP- هم ارزی با یک تابع ارزشی خطی

جنبه‌های زیرین در وزن گذاری توسط AHP به بحث ما مربوط می‌شود.

● گزینه‌ها یا بر اساس ارزش عددی به دست آمده مرتب می‌شوند یا بر اساس ساختار تابع ارزشی خود. حتی وقتی که داده‌های اولیه تابع ارزشی AHP خطی نباشند خود تابع همیشه در استدلال خود خطی عمل می‌کند.

● برای تمام معیارها، وزن گزینه‌ها با روش نرمال کردن بردارها به دست می‌آید و ستانده این فرآیند مجموعه‌ای از رتبه‌هایی است که برای هر گزینه به دست آمده‌اند و در جدول شماره ۲ به آنها تأکید شده است.

در این جدول گزینه‌ها  $p_1 - p_1$  مکان شهر صنعتی A و B و C می‌باشند و محورهای هم رتبه  $x_1 - x_1$  نمایانگر ملاکهای  $c_1 - c_1$  هستند و مقدار  $U(x)$  برای هر گزینه  $p_i$  به دست آمده است.

جدول شماره (۱) مسئله مکان یابی

معیار	گزینه	وزن هر معیار	محل C	محل B	محل A
	استحکام زمین $c_1$	0.031	0.6	0.2	0.2
	مجاورت با رودخانه $c_2$	0.123	0.143	0.429	0.429
	وضعیت هوا (دما و رطوبت) $c_3$	0.123	0.081	0.731	0.188
	شبکه حمل و نقل مناسب $c_4$	0.055	0.333	0.333	0.333
	تعمیرات آب و برق و مخازن $c_5$	0.366	0.6	0.2	0.2
	دسترسی به نیروی انسانی ماهر $c_6$	0.116	0.243	0.088	0.669
	دسترسی به منابع مواد اولیه $c_7$	0.037	0.333	0.333	0.333
	دسترسی به بازار مصرف $c_8$	0.087	0.063	0.265	0.672
	تأمین مالی از طریق وام $c_9$	0.023	0.075	0.333	0.592
	مسائل زیست محیطی $c_{10}$	0.042	0.649	0.072	0.279
	نرخهای نهایی		0.358	.296	0.346

جدول شماره (۲) مقایسه گزینه‌های هم‌ارز

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	UP
P1	.6	.143	.081	.333	.6	.243	.333	.063	.075	.649	.Q358
P2	.2	.429	.731	.333	.2	.088	.333	.265	.333	.072	.296
P3	.2	.429	.188	.333	.2	.669	.333	.672	.592	.279	.346

● در مسائل تک سطحی همه معیارها توسط روش ماتریسی AHP تعیین می‌شوند در این موارد داده‌های ورودی برآوردهایی از نرخ نهایی جانمایی معیارها هستند (که این موارد در بخش ۵ بررسی شده‌اند).

● رتبه‌بندی نهایی وزنی هر یک از گزینه‌ها بر اساس میانگین وزنی هر یک از گزینه‌ها نسبت به همه معیارها انجام می‌شود.

باید توجه داشت پیش فرض ثابت بودن نرخهای نهایی جانمایی معیارها در تعیین وزن هر یک از معیارها وجود دارد. (بر طبق برهان ۳) وزن نهایی هر گزینه بوسیله تابع خطی  $U(\pi) = \sum w_j p_{ij}$  بدست می‌آید و  $p_{ij}$  ژامین رتبه ژامین گزینه است و  $w_j$  وزن معیار ژام.

### ۴-۳) کاربردها:

در اصل، تصمیم گیرنده‌ای که از AHP برای رتبه‌بندی گزینه‌هایش استفاده می‌کند، این کار را بر طبق یک تابع ارزشی خطی انجام می‌دهد. این امر در رابطه با سلسله مراتب چند سطحی تا جایی که حاصل ترکیب خطی توابع خطی، خطی می‌باشد، صدق می‌کند. به بخش ۵-۳ مراجعه کنید. باید تأکید کرد که این امر علیرغم آگاه بودن تصمیم گیرنده یا تحلیل‌گر از وجود این توابع ارزشی یا خطی بودن آنها، وجود دارد.

ارتباط بین AHP و تابع ارزش افزایش توسط کامنتزکی<sup>۱</sup> (Kamenetzky) مورد توجه

قرار گرفت. بلتون (Belton) (بخش ۵۲) خطی بودن  $U(\pi) = \sum_{j=1}^n w_j \pi_{ij}$  را در مسائل

تک سطحی مشاهده کرده است ولی حتی در آن نوشته، هم تأکید به مسائلی متفاوت با این مطلب بوده است. با توجه به این که AHP همیشه یک تابع ارزشی خطی را ایجاد می‌کند کاربرد آن در تئوری مطلوبیت همانطور که طرفدارانش ادعا می‌نمایند، یک راه جذاب شهودی (ولی ناصحیح) برای ساختن تابع ارزشی خطی تصمیم گیرنده به وجود می‌آورد علاوه بر این، نمی‌توان فرض کرد توابع ارزشی تمام تصمیم گیرندگان در تمام تصمیمات آنها خطی باشد.

علاوه بر این در سال ۱۹۹۷ در مقاله‌ای که توسط بارزیلای نوشته شد، اعلام گردید که روش شناسی AHP جهت اینکه در برنامه جامع مدیریت مهندسی آمریکا قرار گیرد، فاقد اعتبار می‌باشد.<sup>۱</sup>

## ۵- تجزیه معیار - قانون ترکیب تابعی:

### ۵-۱) تبدیلات رتبه‌ای (هماهنگ):

تابع ارزشی  $U(x)$  را می‌توان غیر مستقیم با استفاده از تبدیلات رتبه‌ای به دست آورد.  $y: R^n \rightarrow R^m$  که در این جا تعداد  $n$  ملاک به  $m$  ملاک کوچکتر تجزیه شده‌اند. پس  $U(x) = f(y) = f(g(x))$  و در اینجا با ترکیب توابع عناصر خود یعنی  $f, g$  به دست می‌آید. به همین ترتیب  $f(g(x))$  تجزیه شده  $U(x)$  به عناصر خودش است. تبدیلات مدل هم رتبه‌ای که در AHP برای تجزیه ملاکها استفاده می‌شود در زیر نشان داده شده است. تبدیلات کلی در معادلات هم رتبه به وسیله تبدیل زیر انجام می‌شود.

$$(۹) U(x) = f_1 (f_2 (... (f_m(x))))$$

توجه کنید که عموماً تابع  $f_k$  ممکن است غیر خطی باشد و یا متغیرهای وابسته داشته

باشد. همچنین توجه کنید که تا وقتی  $f_k$  یک تبدیل هم رتبه‌ای است نیازی نیست یک تابع ارزشی باشد. برای مثال  $f_k$  می‌تواند تبدیل غیر خطی در یک فضای دوبعدی باشد و یا تبدیل به مبنای فانهایت باشد (که این تبدیل نمی‌تواند خطی شود) از طرف دیگر اگر (برای راحت‌تر کردن تجزیه  $U(x)$ )، می‌توان  $f_k$  را یک تابع ارزشی فرض کنیم، اما عموماً شکل آن برای ما نامعلوم خواهد بود و شکل آن باید بوسیله ارزیابی ترجیحات تصمیم‌گیرنده تعیین شود.

اصول عمومی تجزیه و جانشین سازی در تمام شعب ریاضیات و علوم استفاده می‌شوند مثالهای روشن این مطلب تجزیه های ماتریس استاندارد برای سهولت مدل سازی جبری و تخمین و استفاده از جانشین سازی متغیرها مثل جایگزینی  $y = -x$  وقتی  $x$  خسارت  $y$  سود است در مدل سازی برنامه ریزی خطی هستند که همه اینها را می‌توان روش شناسی تصمیمات تک معیاره دانست البته راههای متعددی برای تجزیه و یا مدل سازی یک مسئله وجود دارد ولی مدلهای هم ارز باید نتایج مشابهی بدهند.

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$$

$$, y_i = f_i(x_i) , f(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

و با جانشین کردن توابع یعنی ترکیب توابع  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$  سرانجام توجه داشته باشد که تابع ارزشی ترکیبی ممکن است معکوس شده، به تابع ارزشی خطی نرمال شده همان طوری که در معادله ۲ داشتیم این مسئله ما را اغوا می‌کند تا فرض کنیم عناصر  $f_k$  از  $U(x)$  با تقریب درجه اول خود جایگزین می‌شوند. این عناصر ممکن است همانگونه معکوس شده و به تابع ارزشی خطی نرمال شده تبدیل شوند. در بخش ۵-۴ نشان داده شده است که این فرض ضمنی که در تجزیه AHP به کار می‌رود غلط است.

## ۲-۵) تجزیه درختی خطی:

برای این که تجزیه سلسله مراتبه‌ای یک تابع ارزشی را به یک درخت مثل شکل شماره



۱ شرح دهیم مسأله مکان یابی AHP را مجدداً در نظر آورید. متغیرهای معیار  $y_1 - y_4$  نماینده ۱- عوامل طبیعی، ۲- عوامل فنی، ۳- عوامل اقتصادی، ۴- قوانین دولتی هستند و به معیارهای فرعی  $x_1 - x_{10}$  مربوطند همان هایی که در جدول شماره ۱ تعریف شدند با معادلات تجزیه سلسله مراتبی زیر داریم:

$$y_1 = 0/111x_1 + 0/444x_2 + 0/444x_3$$

$$y_2 = 0/103x_4 + 0/682x_5 + 0/216x_6$$

$$y_3 = 0/249x_7 + 0/682x_8 + 0/157x_9$$

$$y_4 = x_{10}$$

$$f(y) = 0/276y_1 + 0/536y_2 + 0/146y_3 + 0/642y_4 = 0/9222$$

بنابراین معیار عوامل طبیعی ( $y_1$ ) به معیارهای کوچکتر. استحکام زمین ( $x_1$ ) مجاورت با رودخانه ( $x_2$ ) وضعیت هوا ( $x_3$ ) تقسیم می شود و معیار عوامل فنی ( $y_2$ ) به معیارهای کوچکتری از قبیل شبکه حمل و نقل مناسب ( $x_4$ )، تسهیلات آب و برق و مخابرات ( $x_5$ ) و دسترسی به نیروی انسانی ماهر ( $x_6$ ) تقسیم شده است. ملاک عوامل اقتصادی هم به دسترسی به منابع و مواد اولیه ( $x_7$ ) دسترسی به بازار مصرف ( $x_8$ ) و تأمین مالی از طریق وام تقسیم شده است و در آخر هم معیار قوانین دولتی ( $y_4$ ) که به مفهوم مسایل زیست محیطی ( $x_{10}$ ) بوده است پس  $y_4$  با  $x_{10}$  یکسان هستند.

که ضرایب تجزیه شده این معادلات در این نقطه جزئی در نظر گرفته شده اند (در AHP) این ضرایب به وسیله روش نرمال سازی ماتریسها با برآوردهای ناسازگار نسبتهای وزنی به دست می آیند). نتایج تبدیلات در

$$U(x) = f(g(x)) = 0/276(0/111x_1 + \dots) + \dots + 0/536(0/103x_4 + \dots) + \dots$$

که به صورت ساده تر زیر به این شکل درمی آیند:

$$U(x) = 0/031x_1 + \dots + 0/055x_4 = \sum w_{ij}x_j$$

معیارها در جدول ۱ هستند.

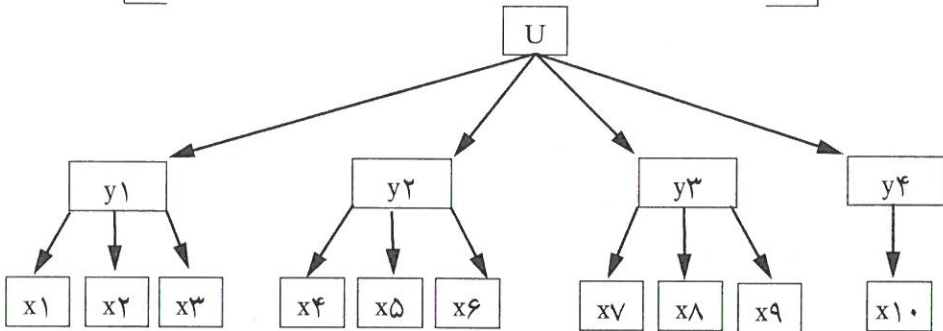
تا وقتی که معادلات تجزیه شده این مثال خطی هستند آنها در شکل ماتریسی روبرو می توانند قرار گیرند.

$$U = Ay \quad , \quad Ay = Bx \quad (10)$$

$$\Rightarrow U = ABX$$

جایی که بردارهای  $y$  و  $x$  عبارتند از:  $x = [x_1, \dots, x_{10}]^T$  و  $y = [y_1, \dots, y_4]^T$  یک ماتریس  $1 \times 4$  خواهد بود  $A = [0/276 \ 0/536 \ 0/146 \ 0/42]$  ، ماتریس  $4 \times 10$  زیر بدست می آید.

$$B = \begin{bmatrix} 0/111 & 0/444 & 0/444 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0/103 & 0/682 & 0/216 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/247 & 0/594 & 0/157 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



شکل (۱) درخت تجزیه مسئله مکان یابی

### ۳-۵) تجزیه خطی عمودی:

معادله ۱۰ شکل عمومی تجزیه‌های خطی ۲ سطحه را نشان می‌دهد. معادلات  $m$  سطحی تجزیه، توسعه خطی ساده‌ای از معادله شماره ۹ هستند.

$$U = A_1 A_2 \dots A_m X \quad (11)$$

تجزیه درختی در ساختار ماتریس  $A_i$  منعکس شده است. تجزیه خطی عمومی به وسیله جابجا کردن این محدودیتها بر روی  $A_i$  بدست می آید و این مسئله مدل سازی متغیرهای وابسته را ممکن می‌سازد. برای معادلات ضمنی و یا صریح موجود و وابستگی میان

گروههای متغیرها و آن چیزی که در ادبیات AHP به نام فرآیند تحلیل شبکه‌ای خوانده می‌شود همه را ممکن می‌کند. در AHP از مفهوم ابرماتریس برای این منظور استفاده می‌شود که مدل درستی برای تجزیه خطی عمومی نمی‌باشد. این مسئله هم مثل سایر مسائل در AHP از قبیل استفاده از روش نرمال سازی ماتریسی، استاندارد سازی بردارهای وزنی همان گونه که نشان داده شده منجر به مدل سازی نادرست می‌شوند.

#### ۵-۴) نرخهای جانشینی زوجی و تجزیه خطی درختی:

AHP در تجزیه درختی با این فرض ضمنی کار می‌کند که عناصر درختی همگی تابع ارزشی هستند. ضرائب این توابع ارزشی به وسیله برآوردهای نرخهای جانشینی زوجی تعیین می‌شوند و همچنین به صورت ضمنی فرض می‌شود که تمام عناصر را مانند معادله ۲ می‌توان نرمال کرد. ما در این قسمت نشان خواهیم داد که عناصر توابع ارزشی

$$n$$

را به این صورت نمی‌توان نرمال کرد. فرض کنید  $U(x) = C + \sum_{j=1}^n w_j x_j$  ما برای این که

تابع ارزشی منحصر به فرد خود را مشخص کنیم دو شرط به آن اضافه می‌کنیم که در

$$n$$

AHP این دو شرط عبارتند از:  $C = 0$  و  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  مثال مکان یابی کارخانه بخش ۵-۲

$$j=1$$

را مجدداً به خاطر بیاورید در آنجا داشتیم:

$$U_1 = \sum_{j=1}^4 a_{ij} y_i, \quad y_i = \sum_{j=1}^{10} b_{ij} x_j \Rightarrow U_1(x) = \sum_{j=1}^4 \left( \sum_{i=1}^{10} a_{ij} b_{ij} \right) x_j$$

$$U_1(x) = \sum_{j=1}^{10} w_j x_j, \quad w_j = \sum_{i=1}^4 a_{ij} b_{ij}$$

حال با جاگذاری  $y_i = L_i + m_i y_i$  تابع ارزشی ما به حالت زیر درخواهد آمد.

$$U_p(x) = k + \sum_{j=1}^4 w_j x_j \quad , \quad w_j = \sum_{i=1}^4 m_i a_i b_{ij}$$

$k = \sum a_i l_i$  مقدار ثابت  $k$

ما می بینیم که اگر  $1 \leq i \leq 4$  و  $m_i = 1$  باشد پس در اینجا فقط  $l_i$  تغییر می کند (متغیر است) و  $U_1(x)$  هم ارز  $U_2(x)$  می شود و بدین صورت لزوم خطی شدن همه توابع بیشتر از بیان نتایج هم ارزی توابع ارزشی، مورد توجه قرار می گیرد. دستکاری برای نرمال سازی عوامل  $m_i$  بر نرخهای جانثینی اثر گذاشته و هم ارزی بین  $U_1(x)$  و  $U_2(x)$  را از بین می برد. ما معمولاً  $w_i/w_j \neq w_i/w_j$  خواهیم دید. به عبارت دیگر توابع میانی را نمی توان نرمال کرد. با این تفاوت وزنه های نهایی ممکن است به وسیله نرخهای جانثینی بدست آمده از نرمال سازی اختیاری جداگانه به دست آیند ولی ما می دانیم که تنها یک نرمال سازی می تواند توسط درختها انجام شود.

## ۶- مثالها:

طبق روش نرمال سازی AHP که در هر شاخه از درخت انجام می شود هر ترکیبی در یک درخت با بیش از یک سطح شامل بیش از یک معادله نرمال سازی است. به عنوان نتیجه می توان گفت تعداد معادلات محدودیتها نادرست است و وزنه های نهایی بستگی به نحوه گروه بندی معیارها دارد به عبارت دیگر تجزیه درختی هم ارز ممکن است منجر به دسته بندی غیر هم ارز توابع ارزشی و رتبه بندی ها شود. AHP برای تهیه وزنه های هر گزینه از وزنه ها و نرمال کردنهای میانی محدودیتها استفاده می کند. تعداد نرخهای مستقل و معادلات محدودیتها بستگی به تعداد ناشناخته ها دارد (که آن هم یکی کمتر از وزنه های نهایی گزینه ها است) و با توجه به این که تعداد محدودیتهای نرمال کننده باید به یک برسد و این هم بدون افزایش نرخهای وزنی مستقل توسط معادلات مربوطه ممکن نیست پس نمی توان توابع ارزشی را به وسیله AHP تعیین کرد.

۱-۶) رتبه بندی معکوس منجر به تجزیه سلسله مراتبی نادرست می شود. مسئله زیر را در نظر بگیرید. مدیرعامل و ۳ مدیر ارشد یک شرکت در حال تحلیل وضعیت مدیریت بازار خود هستند. این شرکت محصولی را با قیمت ثابت تولید کرده می فروشد. فروش این شرکت توسط ۶ فروشگاه انجام می شود. فروشگاههای ۱ و ۲ در غرب شهر فروشگاه ۳ در مرکز شهر و فروشگاههای ۴ و ۵ در شرق شهر قرار گرفته اند. همه این فروشگاهها به این عقیده هستند که تابع ارزشی این شرکت  $U(x) = x_1, \dots, x_5$  بر اساس مجموع درآمد سالانه آنها می باشد و  $x_i$  فروش سالانه فروشگاهها بر حسب میلیون دلار است.

(۵ و ... و ۱) شرکت باید یکی از دو استراتژی B و A را برای بازاریابی خود انتخاب کند. نتایج هر یک از استراتژی های در فروش فروشگاههای آن شرکت به شرح زیر است:

$$A : p = (1 \text{ و } 1 \text{ و } 3 \text{ و } 3)$$

$$B : q = (3 \text{ و } 3 \text{ و } 1 \text{ و } 1)$$

بنابراین معیارهای این مسئله عبارتند از  $x_5$  و ... و  $x_1$  گزینه ها استراتژی بازاریابی B و A هستند و فضای موجه برای گزینه ها هم رتبه به وسیله نقاط P و Q مشخص شده است. تمام آن ۴ مدیر اجرایی شرکت توافق دارند که تمام معیارها ارزش یکسانی دارند و تفاوت  $x_j$  و  $x_i$  در منطقه قرار گرفتن هر یک از فروشگاههاست بنابراین مدیرعامل تابع  $U(x)$  را به شکل زیر تعریف کرد.

$$U(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad (12)$$

و به این دلیل که  $U(p) = U(a) = q$  است پس بین دو گزینه تفاوتی وجود ندارد و ترجیح هر دو استراتژی را یکسان بدست آورد.

یکی از مدیران ارشد از روش AHP برای تجزیه تابع به شرح زیر استفاده کرد و او ابتدا مناطق را تقسیم بندی کرد و ارجحیت را به فروشگاه مرکز شهر داد. پس درخت تجزیه AHP و به شکل شماره ۲ درمی آید و  $s_1$  مجموع فروش سالانه  $x_1$  و  $x_2$  است.  $s_2$  فروش سالانه  $x_3$  و  $s_3$  مجموع فروش سالانه  $x_4$  و  $x_5$  است. همان گونه که قبلاً متذکر شدیم وزنهای یکسانی را باید به هر یک از شاخه های درخت تخصیص داد. بنابراین بر طبق روال کار AHP خواهیم داشت.

$WS_1 = WS_2 = WS_3 = \frac{1}{3}$   $WX_1 = WX_2 = \frac{1}{2}$   $WX_3 = 1$   $WX_4 + WX_5 = \frac{1}{2}$   
 پس وزنهای نهایی ملاکها بصورت زیر می باشد  $(\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{6}$ ) و تابع ارزشی به شکل زیر درمی آید.

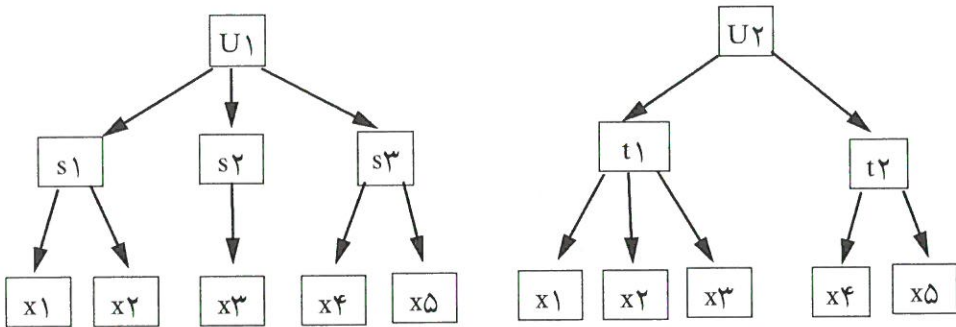
$$U_1(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \quad (13)$$

(برای راحتی ما طرفین معادله را در ۶ ضرب کرده ایم)

مدیر دوم که ارجحیت را به شرق می داد تجزیه را به روش نشان داده شده در شکل شماره ۳ انجام داد و به همین صورت سومین مدیر ارشد تجزیه خویش را به صورت شکل شماره ۴ انجام داد و معادلات توابع ارزشی هر یک به صورت زیر می باشد:

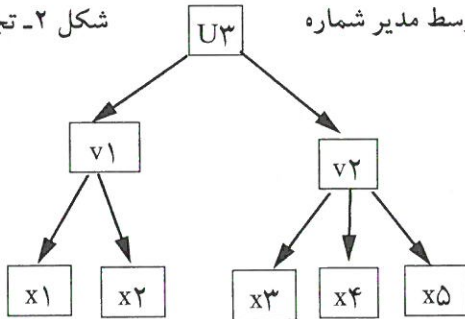
$$U_2(x) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 \quad (14)$$

$$U_3(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \quad (15)$$



شکل ۲- تجزیه توسط مدیر شماره ۱

شکل ۳- تجزیه توسط مدیر شماره ۲



شکل (۴) تجزیه توسط مدیر شماره ۳

شکلهای ۲ و ۳ و ۴ تصمیم گیری در مورد استراتژی بازاریابی روشن است که توابع (۱۵ - ۱۲) از هم متفاوت هستند و داریم:

$$U_1(p) = U_1(Q) \text{ و } U_2(p) < U_2(q) \text{ و } U_3(p) > U_3(Q)$$

همانطور که ملاحظه می کنید با این طیف متفاوت از اولویتها که می بینیم روشن می شود که راهکار AHP در تجزیه سلسله مرتبه ای هم ارز (که یا مدل های هم ارز هستند و یا توصیف مسئله) به صورت غیر هم ارزی (ناهمسانی) توابع را رتبه بندی کرده است. حال این ۴ مدل برنامه ریزی خطی را در نظر بگیرید.

$$0 \leq x_i \leq 5$$

$$۱) \text{Max } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$۲) \text{Max } s_1 + s_2 + s_3 \text{ S.T } s_1 = x_1 + x_2 \quad s_2 = x_3 \quad s_3 = x_4 + x_5$$

$$۳) \text{Max } t_1 + t_2 \text{ S.T } t_1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad t = x_4 + x_5$$

$$۴) \text{Max } v_1 + v_2 \text{ S.T } v_1 = x_1 + x_2 \quad v_2 = x_3 + x_4 + x_5$$

گزینه های Q,P برای تمام این فرمولها که از قانون جانشینی تهیه شده اند صدق می کنند و همه ۴ مدل هم ارز هستند.

به وسیله روش مشابه به سادگی می توان برنامه هایی خطی (و یا غیرخطی) مشابهی را با تجزیه های غیردرختی (یعنی به صورت شبکه ای و یا بازخوردی) ساخت که آن مدلها از طریق معادلات محدودیتهای ضمنی به متغیرها مرتبط شوند.

سرانجام توجه کنید که وقتی تصمیم گیرنده به درستی ارزش ۱ خود را به نسبتها و نرخهای وزنی تمام گزینهها تخصیص بدهد. این متدلوژی نمی تواند به ارزیابی غیرمنطقی و نگرشی تبدیل شود. بدون توجه به این که اولویت بندی توسط چه رویه ای انجام می گیرد این روش باعث ارزیابی های غیرمنطقی (یا حتی ارزیابی های منطقی) برای وزن گذاری می شود. بر طبق AHP این اولویت بندیها منجر به تجزیه غلط می شوند حتی اگر تمام نرخها و نسبتها کاملاً منطقی و صحیح ارزیابی شده باشند.

۲-۶) ناکافی بودن اطلاعات در تجزیه به روش AHP:

ما می توانیم معادلات مسئله مکان یابی را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$U = a_1y_1 + \dots + a_4y_4$$

$$y_1 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \quad y_2 = b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 \quad (16 \text{ و } 17)$$

$$y_3 = b_7x_7 + b_8x_8 + b_9x_9 \quad y_4 = b_{10}x_{10}$$

ضرایب متغیرهای میانی  $a, b$  با استفاده از نرخهای زیر در قالب AHP محاسبه می شوند.

$$a_1 / a_2 / a_3 / a_4 \quad b_1 / b_2 / b_3 \quad b_4 / b_5 / b_6 \quad b_7 / b_8 / b_9 \quad (18)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_4 = 1 \quad b_1 + b_2 + b_3 = 1 \quad \text{و با نرمال کردن}$$

$$b_4 + b_5 + b_6 = 1 \quad b_7 + b_8 + b_9 = 1 \quad b_{10} = 1 \quad (19)$$

و با جایگذاری معادله (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$U = \sum w_j x_j = a_1 b_1 x_1 + a_1 b_2 x_2 + a_1 b_3 x_3 + a_2 b_4 x_4 + \dots \quad (20)$$

ضریب  $w$  نهایی هم به وسیله ضرایب متغیرهای میانی به دست می آید.

هر خواننده ای به راحتی می تواند به صورت عددی این روابط را اثبات کند - مثلاً

$$w_1 = 0/31 = 0/276 \times 0/111 = a_1 b_1$$

$x_1$  بدست می آید توابع میانی  $y_1 \dots y_4$  هنوز نرمال شده هستند.

۴

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 0/276 + 0/536 + 0/146 + 0/042 = 1$$

$i=1$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0/111 + 0/444 + 0/444 = 1, \dots$$

نرمال شدن در معادله ۱۹ که وزنهای واسطه را نرمال کرد منجر به نرمال شدن  $w$ های

نهایی می شود.



$$\sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad (21)$$

$$i=1 \quad 10$$

و این رابطه صحیح است زیرا تابع ارزشی  $U(x) = \sum_{i=1}^n w_i x_i$  فقط با تبدیلات مطلقاً

صعودی تعیین شده است اگر چه همانطور که در مثال بازاریابی نشان داده شد کاربرد معکوس سازی درست نیست. نرمال سازی نهایی به نرمال سازی میانی دلالت نمی کند. (به استثناء  $b_{11} = 1$  که به علت  $x_1 = y_1$  یعنی عدم تجزیه  $y_1$  درست است) بیشتر اینکه، مثال بازاریابی نشان می دهد که معادله ۱۹ نمی تواند قسمتی از یک مدل سازی تجزیه ای درست باشد.

این موضوع به ما می رساند که اطلاعات باقیمانده - معادلات (۱۸-۱۶) برای تهیه نرخهای سازنده  $w_1 / w_2 / \dots / w_n$  کافی نیستند. برای مثال محاسبه  $\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = \frac{w_1}{w_2}$  هر دو نسبت  $\frac{a_1}{a_2}$  را که در AHP به دست می آید و  $\frac{b_1}{b_2}$  را که در AHP محاسبه نمی شود را نیاز داریم. بنابراین تابع ارزشی (۲۰) را نمی توان به وسیله اطلاعات موجود بدست آورد: تا زمانی که وزنه های هر شاخه مثلاً  $(x_1, x_2, x_3)$  محاسبه می شوند نمی توان وزنه های شاخه دیگر را بدست آورد.

### منابع

- 1- Jonathan Barzilai, on the decomposition of value functions, operation research letters, 22, 1988 p, 159-170.
- 2- J, Barilai, Deriving weights from pair wise comparison Matrices, Operation Research Society 48 (12) 1997.
- 3- J. Barzilai, on the use of eigen vector in the AHP, proc. 1.th Int. conf. on Multiple Criteria Decision making, Taipei. vol 1, 1992.
- 4- J, Barzilai, A new methodology for dealing with conflicting engineering design Criteria, proc. 18th Annual Meeting of the American society for Engineering Management 1977.
- 5- V. Belton, A.E. Gear, on shortcoming of saaty's method of analytic hierarchies, omega 11 (3) (1983).
- 6- R. D. Kamenetzky, the relationship between the analytic hierarchy process and the additive value functions, decision science, 13 (4) 1982.
- 7- Saaty, Thomas, A Scaling Method for priorities in Hierarchical Structures, Journal of Mathematical psychology Vol 15 No 3, 1977.
- 8- Saaty, Thomas, The Analytic Hierachy process, NewYork. Mc Graw Hill, 1980.

۹- مؤمنی، منصور، پژوهش عملیاتی (مدلهای احتمالی)، انتشارات سمت، ۱۳۷۶

۱۰- دکتر اصغرپور، تصمیم گیریهای چند معیاره، انتشارات دانشگاه تهران.